14/3/17

Θ1 $x_1, \dots, x_n$ τδ από πληθυσμό (μ, σ^2)

(i) $E(\bar{x}) = \mu$, (ii) $Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$, (iii) $E(s^2) = \sigma^2$

Πόρισμα: $x_1, \dots, x_{1n_1}$ τδ από Πλη (μ_1, σ_1^2)

$x_2, \dots, x_{2n_2}$ τδ από ανεξ Πληθ. (μ_2, σ_2^2)

(i) $E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$ (ii) $Var(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

Θυμίζω: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_1^n (x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2\right]$

$Y = \sum_1^n a_i x_i$, $E(Y) = \sum_1^n a_i E(x_i)$, $Var(Y) = \sum_1^n a_i^2 Var(x_i)$ $x_1, \dots, x_n$ ανεξ. τμ

$m_X(t) = E(e^{tX})$, $m_{aX+\beta}(t) = e^{\beta t} m_X(\alpha t)$

$m_{\sum_1^n x_i}(t) = m_{x_1}(t) \dots m_{x_n}(t)$ για $x_1, \dots, x_n$ ανεξ. τμ.

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$X \sim G(\alpha, \beta) \Rightarrow m_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$

$E(X) = \alpha\beta$, $Var(X) = \alpha\beta^2$

$X_v^2 = \sum_1^v N^2(0,1) \equiv G(\alpha = \frac{v}{2}, \beta = 2)$

ή, για $Z_1, \dots, Z_v$ ανεξ $N(0,1)$

$X = \sum_1^v Z_i^2 \sim X_v^2$

$t_v = \frac{N(0,1)}{\sqrt{X_v^2 / v}}$ $F_{v_1,v_2} = \frac{X_{v_1}^2/v_1}{X_{v_2}^2/v_2}$

Δειγματοληψία από κανονικό πληθυσμό

Θ2 Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$

(i) $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

(ii) Οι στατικές συναρτήσεις (σ.σ.) $\bar{X}$ και S^2 είναι ανεξ. τ.μ.

(iii) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$ (δεν μας ενδιαφέρει εξεταστικά)

Απόδειξη

(ii) —

(i) $\bar{x} \sim N(E(\bar{x}) = \mu, \ Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n})$

$m_{\bar{x}}(t) = m_{\frac{1}{n}\Sigma x_i}(t) = m_{\sum^n x_i}\left(\frac{t}{n}\right) = e^{n\mu\frac{t}{n} + \frac{1}{2}n\sigma^2\frac{t^2}{n^2}} = e^{\mu t + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2}$

$m_{\bar{x}}(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ $\hookrightarrow \equiv N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$m_{\sum x_i}(t) = m_{x_1}(t) \dots m_{x_n}(t)$, x_i ανεξ. τμ.

$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdots e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} = e^{n\mu t + \frac{1}{2}n\sigma^2 t^2}$

(iii) $\frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2}$

$\rightarrow Y = W - Z$

$Y \sim ;$
$W \sim ;$
$Z \sim ;$

$W = \sum^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim X^2_n$, αφού $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \rightsquigarrow \frac{x_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \rightsquigarrow \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$Z = \frac{n(\bar{x}-\mu)}{\sigma^2} \sim X^2_1$

$W \sim X_n^2 \rightsquigarrow m_W(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$

$Z \sim X_1^2 \rightsquigarrow m_Z(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$

κ' Y κ' Z ανεξ. ↯

$W = Y + Z \rightsquigarrow m_W(t) = m_Y(t) \cdot m_Z(t) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow m_Y(t) \cdot (1-2t)^{-\frac{1}{2}} = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$

$\rightsquigarrow \boxed{m_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{n-1}{2}}} \equiv G(\alpha = \frac{n-1}{2}, \beta = 2)$

$= X^2_{n-1}$

Παράδειγμα:

$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{25} = 5$

Τ.Δ. $n = 25$, $N(\mu, \sigma^2 = 625)$, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{625}{25} = 25)$

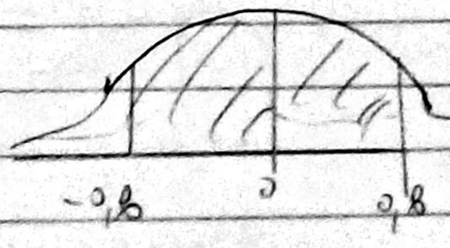
(i) $P(|\bar{X}-\mu| \geq 4) = 1 - P(|\bar{X}-\mu| \leq 4) = 1 - P(-4 \leq \bar{X}-\mu \leq 4)$

$= 1 - P\left(-\frac{4}{5} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{4}{5}\right)$

$= 1 - P(-0.8 \leq Z \leq 0.8 \mid Z \sim N(0,1))$

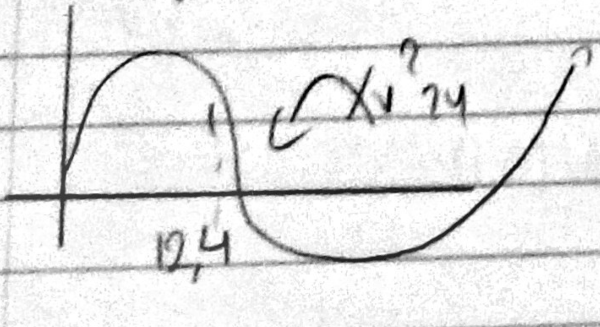
$= 1 - 2 * P(0 < Z \leq 0.8)$

$= 1 - 2 * 0.2881 = 0.4238$



(ii) $P(S^2 \geq 323) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{24 * 323}{625}\right)$

$= P(X^2_{24} \geq 12{,}40) = 0{,}975$



Θ3 $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu,\sigma^2)$. Τότε

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Απόδειξη

$$X_1 \sim N(\mu,\sigma^2) \rightsquigarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \rightsquigarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$ κ' S^2 ανεξ. $\bar{X}$

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Πόρισμα: Έστω $(\bar{X}_1, S_1^2)$ κ' $(\bar{X}_2, S_2^2)$ μέσες τιμές και διακυμάνσεις δύο τ.δ. μεγεθών n_1 κ' n_2 από δύο ανεξάρτητους κανονικούς πληθυσμούς $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ και $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ αντίστοιχα.

(Συμβ. $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$) Τότε η σ.σ.

$$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$ όπου $$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\right)$$

$$\rightsquigarrow \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1-1}, \quad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1} \rightsquigarrow \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$$

$$\chi^2_{n_1+n_2-2}$$

$$\rightsquigarrow \frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1+n_2-2}$$

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\right)$$

$$\frac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{\dfrac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}\Big/(n_1+n_2-2)}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{n_1+n_2-2}/(n_1+n_2-2)}}$$

$$= T \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Θ4 Έστω S_1^2 και S_2^2 οι διακ. δύο τχ. μεγεθών n_1 και n_2 από ανεξ. καν. πλη. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ κ' $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
Τότε $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$

Απόδειξη ...

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1}, \quad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$$

$$\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)} = \frac{\chi^2_{n_1-1}/(n_1-1)}{\chi^2_{n_2-1}/(n_2-1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Θ.ς. κ.ω. (Μέρος 1)

Έστω $x_1, \ldots, x_n$ ανεξ. και ισόνομες τ.μ. (τ.δ.) καθεμία με πεπερασμένη μέση τιμή και διακύμανση σ^2. Τότε, αν το n είναι μεγάλο, η τ.μ.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$ είναι κατά προσέγγιση $N(0,1)$ ή ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow{\text{προσ.}} N(n\mu, n\sigma^2)$$

Κ.Ο.Θ. (Μέρος ΙΙ)

Έστω $x_1, \ldots, x_n$ τ.δ. από πληθυσμό με πεπερασμένη μέση τιμή κ' διακύμανση σ^2. Αν το n είναι μεγάλο, τότε η δειγματική μέση τιμή

$$\tilde{X} \xrightarrow[\text{προσ.}]{\text{κατά}} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$ ή

$$\frac{\tilde{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{προσ.}]{\text{κατά}} N(0,1)$$